# Поиск двойственно-допустимого решения в двойственном симплекс-методе

А. О. Махорин*

Август 2008 г.

## 1 Кусочно-линейная целевая функция

Рассмотрим ЛП-задачу в стандартном формате:

$$\begin{aligned} & z = c^T x \to \min, \\ & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Соответствующая двойственная ЛП-задача имеет вид:

$$\begin{aligned} & \zeta = b^T \pi \to \max, \\ & A^T \pi + \lambda = c, \\ & \lambda \geq 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\pi = (\pi_i)$ — вектор множителей Лагранжа для ограничений-равенств $Ax = b$, $\lambda = (\lambda_j)$ — вектор множителей Лагранжа для условий неотрицательности $x \geq 0$.

Рассмотрим теперь следующую задачу с сепарабельной кусочно-линейной целевой функцией:

$$\begin{aligned} & z = \sum_j \varphi_j(x_j) \to \min, \\ & Ax = b, \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$\varphi_j(x_j) = \begin{cases} +\alpha_j x_j, & \text{если } x_j \geq 0, \\ -\beta_j x_j, & \text{если } x_j < 0. \end{cases} \tag{4}$$

График функции $\varphi_j(x_j)$ для $\alpha_j, \beta_j \geq 0$ показан на рис. 1.

*Кафедра прикладной информатики, Московский авиационный институт, Москва, Россия. E-mail: <mao@mai2.rcnet.ru>, <mao@gnu.org>.

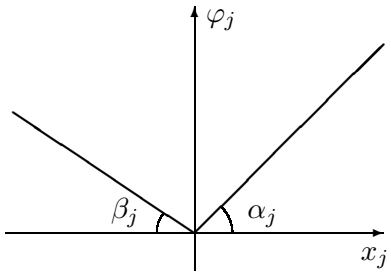

Рис. 1. График функции $\varphi_j(x_j)$ для $\alpha_j, \beta_j \geq 0$.

Чтобы преобразовать задачу (3) к стандартному формату (1), заменим свободные переменные в этой задаче разностью неотрицательных переменных:

$$x = (x_j) = x^+ - x^- = (x_j^+ - x_j^-), \quad x^+, x^- \geq 0.$$

В любом базисном решении задачи (3) переменные $x_j^+$ и $x_j^-$ не могут быть базисными одновременно, поскольку в противном случае в базисной матрице были бы два линейно зависимых столбца. Следовательно, хотя бы одна переменная $x_j^+$ или $x_j^-$ будет небазисной, а значит, равной нулю. Поэтому:

$$x_j = \begin{cases} +x_j^+, & \text{если } x_j \geq 0, \\ -x_j^-, & \text{если } x_j < 0, \end{cases}$$

откуда следует, что:

$$\varphi(x_j) = \alpha_j x_j^+ + \beta_j x_j^-.$$

Таким образом, задача (3) принимает стандартный вид:

$$\begin{aligned} & z = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix} \to \min, \\ & (A \mid -A) \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix} = b, \\ & \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix} \geq 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\alpha = (\alpha_j)$, $\beta = (\beta_j)$. Двойственную задачу к (5) можно получить из (2), подставив компоненты задачи (5) в (1):

$$\begin{aligned} & \zeta = \beta^T \pi \to \max, \\ & (A \mid -A)^T \pi + \begin{pmatrix} \lambda^+ \\ \lambda^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} \lambda^+ \\ \lambda^- \end{pmatrix} \geq 0, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\lambda^+ = (\lambda_j^+)$ и $\lambda^- = (\lambda_j^-)$ — множители Лагранжа для условий $x^+ \geq 0$ и $x^- \geq 0$, соответственно. Двойственную систему ограничений-равенств задачи (6) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} A^T\pi + \lambda^+ &= \alpha, \\ -A^T\pi + \lambda^- &= \beta, \end{aligned}$$

откуда следует, что:

$$\lambda^+ + \lambda^- = \alpha + \beta,$$

а поскольку $\lambda^- \geq 0$, то:

$$\lambda^+ = \alpha + \beta - \lambda^- \leq \alpha + \beta.$$

В результате двойственная задача (6) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} &\zeta = b^T\pi \to \max, \\ &A^T\pi + \lambda = \alpha, \\ &0 \leq \lambda \leq \alpha + \beta, \end{aligned}$$

где $\lambda = \lambda^+$. Заметим далее, что:

$$\lambda = -A^T\pi + \alpha,$$

поэтому:

$$0 \leq -A^T\pi + \alpha \leq \alpha + \beta \;\Leftrightarrow\; -\beta \leq A^T\pi \leq \alpha.$$

Это позволяет записать двойственную задачу (6) в окончательном виде:

$$\begin{aligned} &\zeta = b^T\pi \to \max, \\ &-\beta \leq A^T\pi \leq \alpha. \end{aligned} \tag{7}$$

Обратим внимание, что кусочно-линейная целевая функция в исходной задаче (3) приводит к двусторонним ограничениям в соответствующей двойственной задаче (7).

## 2 Простой случай поиска допустимого решения

Рассмотрим вначале в качестве примера задачу отыскания допустимого решения простой системы ограничений:

$$\begin{aligned} &Ax = b, \\ &x \geq 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Указанная задача эквивалентна задаче (3), в которой целевая функция имеет смысл суммы невязок (штрафов) для условий неотрицательности $x_j \geq 0$ (рис. 2):

$$\varphi_j(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_j \geq 0, \\ -\beta_j x_j, & \text{если } x_j < 0, \end{cases} \tag{9}$$

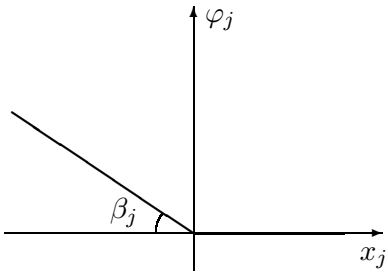

Рис. 2. Невязка $\varphi_j(x_j)$ для условия $x_j \geq 0$.

где $\beta = (\beta_j) > 0$ можно рассматривать как вектор весовых коэффициентов невязок для отдельных переменных. Подставляя $\alpha = 0$ в (7) получим соответствующую двойственную задачу:

$$\begin{aligned} \zeta = b^T\pi \to \max, \\ -\beta \leq A^T\pi \leq 0, \end{aligned} \tag{10}$$

оптимальное базисное решение которой однозначно определяет некоторое базисное допустимое решение исходной системы ограничений (8) при условии, что сумма невязок $\zeta$ в оптимальной точке равна нулю.

## 3 Поиск допустимого решения в общем случае

Рассмотрим теперь задачу отыскания допустимого решения более общей системы ограничений:

$$\begin{aligned} (A_F\ A_P\ A_N\ A_Z) \begin{pmatrix} x_F \\ x_P \\ x_N \\ x_Z \end{pmatrix} = b, \\ -\infty < x_F < +\infty, \\ 0 \leq x_P < +\infty, \\ -\infty < x_N \leq 0, \\ x_Z = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

где $x_F$, $x_P$, $x_N$, $x_Z$ — векторы, соответственно, свободных (неограниченных по знаку), неотрицательных, неположительных, нулевых переменных. Как и в простом случае (см. предыдущий раздел) указанная задача эквивалентна задаче (3), в которой целевая функция представляет собой сумму невязок. Однако теперь возможны четыре типа невязок $\varphi_j(x_j)$ в зависимости от типа границ переменной $x_j$ (рис. 3). При этом соответ-

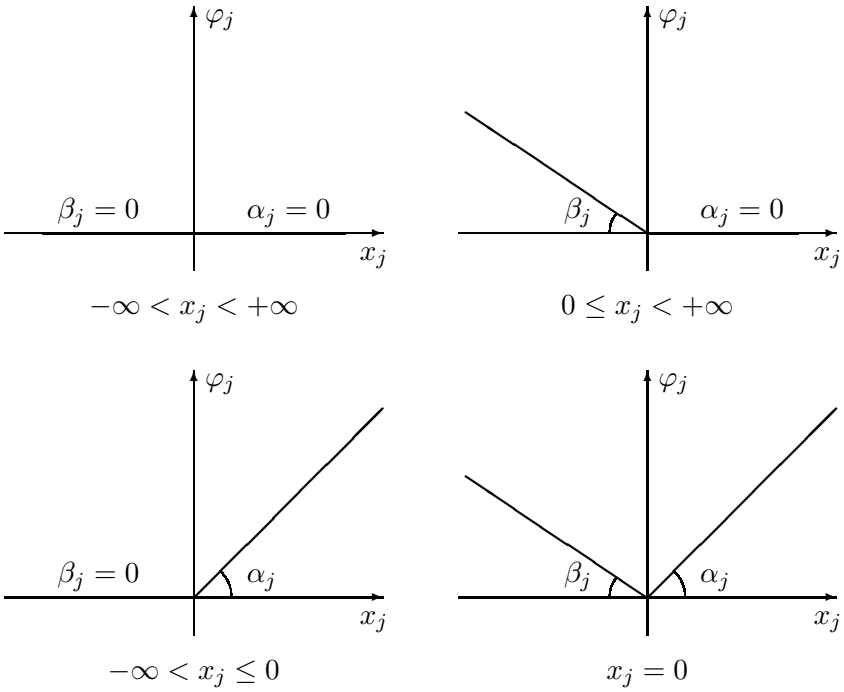


Рис. 3. Невязки $\varphi_j(x_j)$ для различных типов границ $x_j$.

ствующая двойственная задача (7) будет следующей:

$$\zeta = \beta^T \pi \to \max,$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\beta_P \\ 0 \\ -\beta_Z \end{pmatrix} \le (A_F\ A_P\ A_N\ A_Z)^T \pi \le \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_N \\ \alpha_Z \end{pmatrix},$$

или в окончательном виде:

$$\begin{aligned} \zeta = b^T \pi &\to \max, \\ A_F^T \pi &= 0, \\ -\beta_P \le A_P^T \pi &\le 0, \\ 0 \le A_N^T \pi &\le \alpha_N, \\ -\beta_Z \le A_Z^T \pi &\le \alpha_Z. \end{aligned} \tag{12}$$

Заметим, что каждой переменной $x_j$ исходной системы ограничений (11) соответствует ограничение двойственной задачи (12), при этом тип границ переменной $x_j$ однозначно определяет границы соответствующего двойственного ограничения.

# 4 Поиск двойственно-допустимого решения для ЛП-задачи общего вида

Рассмотрим ЛП-задачу общего вида:

$$
\begin{aligned}
& z = c^T x = c_F^T x_F + c_L^T x_L + c_U^T x_U + c_D^T x_D \to \min, \\
& Ax = (A_F \ A_L \ A_U \ A_D) \begin{pmatrix} x_F \\ x_L \\ x_U \\ x_D \end{pmatrix} = b, \\
& -\infty < x_F < +\infty, \\
& \quad l \le x_L < +\infty, \\
& -\infty < x_U \le u, \\
& \quad l_D \le x_D \le u_D,
\end{aligned}
\tag{13}
$$

где $x_F$, $x_L$, $x_U$, $x_D$ — векторы, соответственно, свободных (неограниченных по знаку), ограниченных снизу, ограниченных сверху, ограниченных с двух сторон переменных.[1]

Из условий оптимальности Куна — Таккера следует, что соответствующая двойственная система ограничений для задачи (13) имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
& A^T \pi + \lambda = (A_F \ A_L \ A_U \ A_D)^T \pi + \begin{pmatrix} \lambda_F \\ \lambda_L \\ \lambda_U \\ \lambda_D \end{pmatrix} = c = \begin{pmatrix} c_F \\ c_L \\ c_U \\ c_D \end{pmatrix}, \\
& -\infty < \ \pi \ < +\infty, \\
& \qquad \lambda_F = 0, \\
& \qquad \lambda_L \ge 0, \\
& \qquad \lambda_U \le 0, \\
& -\infty < \lambda_D < +\infty,
\end{aligned}
\tag{14}
$$

где $\pi$ — вектор множителей Лагранжа для ограничений-равенств $Ax = b$, $\lambda_F$, $\lambda_L$, $\lambda_U$, $\lambda_D$ — векторы множителей Лагранжа для границ переменных $x_F$, $x_L$, $x_U$, $x_D$, соответственно.

Если для решения исходной ЛП-задачи (13) используется двойственный симплекс-метод, то для начала поиска необходимо иметь базисное двойственно-допустимое решение, т. е. базисное решение, удовлетворяющее двойственной системе ограничений (14). Для отыскания такого начального базисного решения можно использовать следующий способ.

[1] Фиксированные переменные можно рассматривать как переменные, ограниченные с двух сторон, у которых нижняя и верхняя границы совпадают.

Заметим, что система ограничений (14) совпадает с системой ограничений (11), поэтому допустимое решение системы (14) можно найти в результате решения соответствующей двойственной ЛП-задачи. Чтобы сделать матрицу системы (14) более наглядной, объединим все двойственные переменные в один вектор:

$$\begin{pmatrix} A_F^T & I & & & \\ A_L^T & & I & & \\ A_U^T & & & I & \\ A_D^T & & & & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi \\ \lambda_F \\ \lambda_L \\ \lambda_U \\ \lambda_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_F \\ c_L \\ c_U \\ c_D \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -\infty \\ 0 \\ 0 \\ -\infty \\ -\infty \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} \pi \\ \lambda_F \\ \lambda_L \\ \lambda_U \\ \lambda_D \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} +\infty \\ 0 \\ +\infty \\ 0 \\ +\infty \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Рассматривая систему (15) как систему (11) и используя вектор переменных $(-y) = (-y_F, -y_L, -y_U, -y_D)$ в качестве вектора двойственных переменных для ограничений-равенств системы (15), можно построить соответствующую двойственную ЛП-задачу (12), которая в обозначениях системы (15) будет следующей:

$$\begin{aligned} -c_F^T y_F - c_L^T y_L - c_U^T y_U - c_D^T y_D &\to \max, \\ -A_F y_F - A_L y_L - A_U y_U - A_D y_D &= 0, \\ -\beta_F \le -y_F &\le \alpha_F, \\ -\beta_L \le -y_L &\le 0, \\ 0 \le -y_U &\le \alpha_U, \\ -y_D &= 0, \end{aligned}$$

или, если умножить все компоненты на $(-1)$:

$$\begin{aligned} c_F^T y_F + c_L^T y_L + c_U^T y_U + c_D^T y_D = c^T y &\to \min, \\ A_F y_F + A_L y_L + A_U y_U + A_D y_D = Ay &= 0, \\ -\alpha_F \le y_F &\le \beta_F, \\ 0 \le y_L &\le \beta_L, \\ -\alpha_U \le y_U &\le 0, \\ y_D &= 0, \end{aligned} \tag{16}$$

где $\alpha_j$ и $\beta_j$ — весовые коэффициенты невязок для переменных $\lambda_j$.

Таким образом, базисное оптимальное решение ЛП-задачи (16) будет двойственно-допустимым для исходной ЛП-задачи (13) при условии, что сумма невязок $c^T y$ в оптимальной точке равна нулю.

С точки зрения реализации рассмотренного метода поиска двойственно-допустимого решения существенными являются следующие два обстоятельства.

1. Исходная ЛП-задача (13) и вспомогательная ЛП-задача (16) имеют один и тот же вектор коэффициентов целевой функции и матрицу коэффициентов ограничений и отличаются лишь правыми частями ограничений-равенств[2] и границами переменных. Поэтому любой вариант двойственного симплекс-метода, предназначенного для решения исходной задачи (13), можно использовать без каких-либо изменений и для решения вспомогательной задачи (16).

2. Для задачи (16) двойственно-допустимым является любое базисное решение, поскольку все переменные в этой задаче имеют конечные нижние и верхние границы. Поэтому решение этой задачи можно начинать с любого заданного базиса.

---

[2] В пакете GLPK система ограничений-равенств имеет вид $(I \mid -A)x = 0$, где $I$ — единичная матрица, соответствующая вспомогательным переменным, $A$ — исходная матрица, соответствующая структурным переменным. Поэтому правые части ограничений-равенств равны нулю для обеих задач (13) и (16).