Формулы пересчета симплекс-таблицы при переходе к смежному базису

А. О. Махорин*

Май 2008 г.

Симплекс-таблица (или *преобразованная задача*) — это ЛП-задача, записанная в преобразованном виде, где целевая функция и базисные переменные явно выражены через небазисные переменные.

В пакете GLPK используется следующее представление симплекс-таблицы:

$$\begin{aligned} z &= d^T x_N + c_0, \\ x_B &= \Xi x_N, \end{aligned} \tag{1}$$

где z — целевая функция, x_B — вектор базисных переменных, x_N — вектор небазисных переменных, d — вектор относительных оценок небазисных переменных, c_0 — постоянный член целевой функции, Ξ — матрица коэффициентов влияния небазисных переменных на базисные переменные (часто эту матрицу также называют симплекс-таблицей).

Симплекс-таблица (1), соответствующая некоторому базису, полностью определяется исходной ЛП-задачей и разбиением переменных на базисные и небазисные. Однако в некоторых случаях возникает необходимость иметь явные формулы пересчета элементов симплекс-таблицы при переходе к смежному базису.

Для вывода этих формул запишем симплекс-таблицу в развернутом виде (постоянный член целевой функции опущен):

$$\begin{aligned} z = {} & d_1(x_N)_1 + \ldots + d_q(x_N)_q + \ldots + d_n(x_N)_n \\ (x_B)_1 = {} & \xi_{11}(x_N)_1 + \ldots + \xi_{1q}(x_N)_q + \ldots + \xi_{1n}(x_N)_n \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (x_B)_p = {} & \xi_{p1}(x_N)_1 + \ldots + \xi_{pq}(x_N)_q + \ldots + \xi_{pn}(x_N)_n \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (x_B)_m = {} & \xi_{m1}(x_N)_1 + \ldots + \xi_{mq}(x_N)_q + \ldots + \xi_{mn}(x_N)_n \end{aligned} \tag{2}$$

Допустим, что в смежном базисе базисная переменная $(x_B)_p$ становится небазисной, а небазисная переменная $(x_N)_q$ — базисной.

*Кафедра прикладной информатики, Московский авиационный институт, Москва, Россия. E-mail: <mao@mai2.rcnet.ru>, <mao@gnu.org>.

Чтобы выразить новую базисную переменную $(x_N)_q$ через новый набор небазисных переменных, включающий $(x_B)_p$, преобразуем p-ю (ведущую) строку симплекс-таблицы (2):

$$(x_B)_p = \xi_{pq}(x_N)_q + \sum_{j \neq q} \xi_{pj}(x_N)_j,$$

откуда

$$(x_N)_q = \frac{1}{\xi_{pq}}(x_B)_p - \sum_{j \neq q} \frac{\xi_{pj}}{\xi_{pq}}(x_N)_j. \tag{3}$$

Исключим теперь $(x_N)_q$ из остальных строк симплекс-таблицы (2), для чего подставим $(x_N)_q$ из (3) в каждую i-ю строку ($i \neq p$):

$$\begin{aligned}
(x_B)_i &= \xi_{iq}(x_N)_q + \sum_{j \neq q} \xi_{ij}(x_N)_j = \\
&= \xi_{iq}\left[\frac{1}{\xi_{pq}}(x_B)_p - \sum_{j \neq q} \frac{\xi_{pj}}{\xi_{pq}}(x_N)_j\right] + \sum_{j \neq q} \xi_{ij}(x_N)_j = \\
&= \frac{\xi_{iq}}{\xi_{pq}}(x_B)_p - \sum_{j \neq q} \frac{\xi_{iq}\xi_{pj}}{\xi_{pq}}(x_N)_j + \sum_{j \neq q} \xi_{ij}(x_N)_j = \\
&= \frac{\xi_{iq}}{\xi_{pq}}(x_B)_p + \sum_{j \neq q} \left(\xi_{ij} - \frac{\xi_{iq}\xi_{pj}}{\xi_{pq}}\right)(x_N)_j,
\end{aligned} \tag{4}$$

а также в строку целевой функции:

$$\begin{aligned}
z &= d_q(x_N)_q + \sum_{j \neq q} d_j(x_N)_j = \\
&= d_q\left[\frac{1}{\xi_{pq}}(x_B)_p - \sum_{j \neq q} \frac{\xi_{pj}}{\xi_{pq}}(x_N)_j\right] + \sum_{j \neq q} d_j(x_N)_j = \\
&= \frac{d_q}{\xi_{pq}}(x_B)_p - \sum_{j \neq q} \frac{d_q\xi_{pj}}{\xi_{pq}}(x_N)_j + \sum_{j \neq q} d_j(x_N)_j = \\
&= \frac{d_q}{\xi_{pq}}(x_B)_p + \sum_{j \neq q} \left(d_j - \frac{d_q\xi_{pj}}{\xi_{pq}}\right)(x_N)_j.
\end{aligned} \tag{5}$$

Рассмотренное преобразование симплекс-таблицы по существу представляет собой отдельный шаг метода Гаусса — Жордана, обычно применяемого для решения систем линейных алгебраических уравнений и основанного на приведении матрицы коэффициентов системы к единичной матрице.

Используя соотношения (3), (4) и (5), а также полагая, что в новой симплекс-таблице для смежного базиса p-я строка соответствует новой

базисной переменной $(x_N)_q$, а q-й столбец — новой небазисной переменной $(x_B)_p$, можно получить необходимые формулы пересчета для вычисления элементов новой симплекс-таблицы по известным элементам текущей симплекс-таблицы:

1) для ведущей строки:

$$\overline{\xi}_{pq} = \frac{1}{\xi_{pq}}, \tag{6}$$

$$\overline{\xi}_{pj} = -\frac{\xi_{pj}}{\xi_{pq}} = -\overline{\xi}_{pq}\xi_{pj}, \quad j \neq q. \tag{7}$$

2) для остальных строк ($i \neq p$):

$$\overline{\xi}_{iq} = \frac{\xi_{iq}}{\xi_{pq}} = \overline{\xi}_{pq}\xi_{iq}, \tag{8}$$

$$\overline{\xi}_{ij} = \xi_{ij} - \frac{\xi_{iq}\xi_{pj}}{\xi_{pq}} = \xi_{ij} - \overline{\xi}_{iq}\xi_{pj} = \xi_{ij} + \xi_{iq}\overline{\xi}_{pj}, \quad j \neq q. \tag{9}$$

3) для строки целевой функции:

$$\overline{d}_q = \frac{d_q}{\xi_{pq}} = \overline{\xi}_{pq}d_q, \tag{10}$$

$$\overline{d}_j = d_j - \frac{d_q\xi_{pj}}{\xi_{pq}} = d_j - \overline{d}_q\xi_{pj} = d_j + d_q\overline{\xi}_p j, \quad j \neq q. \tag{11}$$

Заметим, что строка целевой функции пересчитывается по тем же формулам, что и строки, которые не являются ведущими, поскольку целевую функцию можно рассматривать как базисную переменную, которая никогда не выходит из базиса.
