Масштабирование ЛП-задачи

А. О. Махорин*

Август 2008 г.

1 Масштабирование исходных данных

В пакете GLPK используется следующий формат ЛП-задачи:[1]

$$z = c^T x_S + c_0, \tag{1}$$

$$x_R = A x_S, \tag{2}$$

$$l_R \le x_R \le u_R, \tag{3}$$

$$l_S \le x_S \le u_S, \tag{4}$$

где x_S — вектор структурных переменных, x_R — вектор вспомогательных переменных, z — целевая функция, c — вектор коэффициентов целевой функции, c_0 — постоянный член целевой функции, A — матрица коэффициентов ограничений, l_R — вектор нижних границ вспомогательных переменных, u_R — вектор верхних границ вспомогательных переменных, l_S — вектор нижних границ структурных переменных, u_S — вектор верхних границ структурных переменных.

Масштабирование задачи состоит в замене исходной матрицы коэффициентов ограничений A масштабированной матрицей:

$$\widetilde{A} = RAS, \tag{5}$$

где $R = \mathrm{diag}(r_{ii})$ и $S = \mathrm{diag}(s_{jj})$ — диагональные матрицы масштабирования строк и столбцов, соответственно (диагональные элементы этих матриц предполагаются положительными).

Формат масштабированной задачи совпадает с форматом исходной задачи (1)—(4), при этом компоненты масштабированной задачи можно определить исходя из основного соотношения (5) следующим образом.

*Кафедра прикладной информатики, Московский авиационный институт, Москва, Россия. E-mail: <mao@mai2.rcnet.ru>, <mao@gnu.org>.

[1] Подробнее см. справочное руководство по пакету GLPK.

Из (5) следует, что $A = R^{-1}\widetilde{A}S^{-1}$. Подставляя это выражение в (2), получим:

$$x_R = R^{-1}\widetilde{A}S^{-1}x_S \Leftrightarrow Rx_R = \widetilde{A}(S^{-1}x_S) \Leftrightarrow \widetilde{x}_R = \widetilde{A}\widetilde{x}_S,$$

где

$$\widetilde{x}_R = Rx_R \ \text{ и } \ \widetilde{x}_S = S^{-1}x_S \tag{6}$$

есть масштабированные векторы вспомогательных и структурных переменных.

Из (6) следует, что $x_R = R^{-1}\widetilde{x}_R$. Подставляя это выражение в (3), получим:

$$l_R \le R^{-1}\widetilde{x}_R \le u_R \Leftrightarrow Rl_R \le \widetilde{x}_R \le Ru_R \Leftrightarrow \widetilde{l}_R \le \widetilde{x}_R \le \widetilde{u}_R,$$

где

$$\widetilde{l}_R = Rl_R \ \text{ и } \ \widetilde{u}_R = Ru_R \tag{7}$$

есть масштабированные векторы нижних и верхних границ вспомогательных переменных.

Из (6) также следует, что $x_S = S\widetilde{x}_S$. Подставляя это выражение в (1) и (4), получим:

$$z = c^T S\widetilde{x}_S + c_0 = (Sc)^T\widetilde{x}_S + c_0 = \widetilde{c}^T\widetilde{x}_S + c_0,$$

$$l_S \le S\widetilde{x}_S \le u_S \Leftrightarrow S^{-1}l_S \le \widetilde{x}_S \le S^{-1}u_S \Leftrightarrow \widetilde{l}_S \le \widetilde{x}_S \le \widetilde{u}_S,$$

где

$$\widetilde{c} = Sc \tag{8}$$

есть масштабированный вектор коэффициентов целевой функции, а

$$\widetilde{l}_S = S^{-1}l_S \ \text{ и } \ \widetilde{u}_S = S^{-1}u_S \tag{9}$$

есть масштабированные векторы нижних и верхних границ структурных переменных.

Таким образом, переход от исходной задачи (1)—(4) к масштабированной задаче в том же формате для заданных масштабирующих матриц R и S состоит в замене компонент исходной задачи масштабированными компонентами в соответствии с формулами (5), (7), (8) и (9).

2 Обратное масштабирование решения

В результате решения масштабированной ЛП-задачи компоненты решения получаются масштабированными. Поэтому для получения решения исходной задачи (т. е. немасштабированного решения) необходимо выполнить обратное масштабирование компонент решения. Рассмотрим соответствующие формулы.

Формулы обратного масштабирования вспомогательных и структурных переменных непосредственно следуют из (6):

$$x_R = R^{-1}\widetilde{x}_R \;\;\text{и}\;\; x_S = S\widetilde{x}_S. \tag{10}$$

Чтобы вывести формулы обратного масштабирования двойственных переменных (множителей Лагранжа), обратимся к двойственной системе ограничений-равенств, которая для задачи (1)—(4) имеет следующий вид:

$$(I \mid -A)^T\pi + \begin{pmatrix}\lambda_R\\ \lambda_S\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ c\end{pmatrix}, \tag{11}$$

где π — вектор множителей Лагранжа для ограничений-равенств (2), λ_R — вектор множителей Лагранжа для ограничений-неравенств (3), λ_S — вектор множителей Лагранжа для ограничений-неравенств (4). (Множители λ_R есть переменные, двойственные к вспомогательным переменным x_R, а множители λ_S — переменные, двойственные к структурным переменным x_S.)

Запишем систему (11) в развернутом виде:

$$\begin{cases} \pi + \lambda_R = 0, \\ -A^T\pi + \lambda_S = c. \end{cases}$$

Из первого равенства следует, что $\pi = -\lambda_R$. Подставляя это выражение во второе равенство, получим основное равенство для двойственных переменных:

$$A^T\lambda_R + \lambda_S = c. \tag{12}$$

В случае масштабированного решения равенство (12) содержит масштабированные компоненты:

$$\widetilde{A}^T\widetilde{\lambda}_R + \widetilde{\lambda}_S = \widetilde{c}. \tag{13}$$

Из (5) следует, что $\widetilde{A}^T = (RAS)^T = SA^TR$. Подставим это выражение, а также выражение (8) в (12):

$$SA^TR\widetilde{\lambda}_R + \widetilde{\lambda}_S = Sc \Leftrightarrow A^T(R\widetilde{\lambda}_R) + (S^{-1}\widetilde{\lambda}_S) = c \Leftrightarrow A^T\lambda_R + \lambda_S = c,$$

откуда следует, что:

$$\lambda_R = R\widetilde{\lambda}_R \;\;\text{и}\;\; \lambda_S = S^{-1}\widetilde{\lambda}_S, \tag{14}$$

где λ_R и λ_S — немасштабированные векторы двойственных переменных.

Таким образом, переход от компонент решения масштабированной задачи $\widetilde{x}_R$, $\widetilde{x}_S$, $\widetilde{\lambda}_R$, $\widetilde{\lambda}_S$ к соответствующим компонентам решения исходной (немасштабированной) задачи x_R, x_S, λ_R, λ_S осуществляется по формулам (10) и (14).